

学优生与学困生几何问题表征的认知差异

——来自眼动和话语分析技术的整合证据

包含金^{1,3}, 刘毅², 焦江丽^{1,2}

(1. 新疆师范大学 教育科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017;

2. 新疆心智发展与学习科学重点实验室, 新疆 乌鲁木齐 830017; 3. 昌吉学院 教育科学学院, 新疆 昌吉 831100)

摘要:几何问题表征方式是影响中学生几何问题解决的关键认知因素,研究选取某中学初中二年级学生32人(学优生16人、学困生16人),基于眼动和话语分析技术,采用SMI遥测式眼动仪探讨学优生和学困生表征不同难度平面几何问题的认知差异。眼动结果发现,学优生在总注视次数、总注视时间、兴趣区注视次数、兴趣区注视时间和文字兴趣区注视次数上均显著小于学困生。话语分析技术发现,学优生倾向于问题情境和多元的认知加工,学困生更加倾向于直译或单一的认知加工。以上结果说明,学优生和学困生表征几何问题兴趣区均倾向于图形认知加工;学优生倾向于使用问题模型策略,而学困生表现出认知加工困难,更多地使用直译转化策略;学优生比学困生表现出更好的问题表征能力和认知加工灵活性。

关键词:几何问题表征;眼动;学优生;学困生;话语分析技术

中图分类号:G632.0 文献标识码:A 文章编号:1004-9894(2025)04-0058-07

引用格式:包含金,刘毅,焦江丽.学优生与学困生几何问题表征的认知差异——来自眼动和话语分析技术的整合证据[J].数学教育学报,2025,34(4):58-64.

1 研究背景

几何问题表征指在几何问题解决过程中,问题解决者运用已有知识经验对几何问题中的文字、图形、符号等信息进行分析和解释,形成对几何问题解决的认知表征过程^[1]。几何问题表征是数学问题表征的重要内容之一,有研究者将其分为对问题情境中的图形表征和问题素材表征^[2];也有研究者将其分为符号表征和物理表征^[3]。

关于几何问题表征的探讨是数学问题解决领域中的热点问题之一^[4]。相关学者从影响几何问题表征的认知因素和不同类型个体的认知差异方面对这一问题进行了探讨。其中,影响几何问题表征的认知因素主要包括:问题图式、心理表征、认知情境、视觉工作记忆和多重表征能力。例如:Chinnappan探讨了学生几何问题解决过程中的心理模型构建、原有几何知识的组织质量以及知识之间潜在关系对几何问题解决的影响,并揭示了几何知识质量对学生心理模型构建的影响机制^[5]。此外,不同类型个体几何问题表征的认知心理之间存在差异。例如:Schoenfeld的研究发现,新手容易被问题情境的“表面信息”所误导,而专家能够感知问题的“深层含义”;专家比新手具有更好的“执行”元认知策略的能力,也能够防止解决问题资源的浪费^[6]。Lawson和Chinnappan比较高成就和低成就学生在解决几何问题时的表现,结果发现:高成就学生不仅获得了更多的几何知识,而且能够更灵活地使用这些知识;高成就学生在表征较难几何问题时,能够较好地使用原有认知经验和信息,体现出较灵活的问题解决能力^[7]。那么,造成这种差异的原因是什么呢?Fitrianna等研究发现,具有较高数学素养的学生,能够

灵活地将数据/信息表征转化为图表/表格等其它表征形式,并能够熟练地使用书面文字或文本进行有效问题解决;而数学素养较低的学生缺乏问题信息的灵活转换能力和文本书面表达能力^[8]。Akkurt和Durmus也发现,低年级的学生更倾向于使用外部信息和经验进行数学问题解决,而成绩优异的高年级学生能够使用情境中的潜在信息和信息间的逻辑关系进行数学问题表征^[9]。

使用眼动追踪技术记录被试者数学问题解决过程中的眼动轨迹,能够从知觉层面更好地揭示被试者数学问题解决时的认知加工过程。有关几何问题表征的眼动研究认为,几何问题表征过程中对眼动的追踪是将眼球运动与问题解决时心理表征过程相联系^[10]。通过眼动模式的探索可以更好地了解几何问题解决的认知加工过程。研究发现,影响学生有效进行几何问题解决的因素包括:阅读几何文本的眼动模式差异、几何图形的注视时间、注视次数等指标。例如:Lin等通过对高中生几何问题解决过程中几何图形的注视持续时间、扫视长度、注视次数等指标的分析,区分出了成功和不成功的问题解决者^[11]。然而,有研究者认为,在几何问题解决过程中,除对几何图形的表征之外,阅读几何描述时整合文本图形信息的能力也是影响几何问题解决的重要因素。Lee和Wu记录了65名大学生在阅读几何问题过程中的眼动模式,结果发现:学生即使在几何图形上花费了40%的注视时间,其阅读模式仍然是文本模式;描述问题情境的词汇顺序是学生将几何文本与图形进行信息整合的主要影响因素^[12]。

近年来,研究者认为,单纯对几何问题解决中认知加工的眼动模式进行分析,不足以解释问题表征的差异性^[13-15]。有

收稿日期:2025-02-20

基金项目:新疆维吾尔自治区社科基金项目——南疆数学学习困难儿童的认知机制及干预模式构建研究(2024BJYX149);新疆维吾尔自治区研究生教育创新计划项目——CBE视域下新疆应用型本科院校能源类人才培养模式优化研究(XJ2025G201)

作者简介:包含金(1982—),男,甘肃武威人,讲师,博士生,主要从事学习心理研究。焦江丽为本文通讯作者。

研究者尝试将眼动分析与话语分析、刺激回忆访谈、微观手势和凝视分析、出声思考与口头报告、回顾性反思等相结合进行多元分析,以更好地将眼动数据与具体认知加工过程相结合进行几何问题表征的探讨^[16-18]。例如:Schindler和Lilienthal将眼动追踪与刺激回忆访谈(Stimulated Recall Interview简称SRI)任务相结合探讨了几何问题解决的认知过程^[19],Wu和Liu则发现,具备高/低先验知识的学生在使用多重表征进行几何论证时眼动数据与几何表征相关的口头报告之间存在差异^[20]。Heyd-Metzuyanim等人运用眼动追踪与话语分析相结合的技术,对4名九年级学生在真实情境中的几何问题解决进行了深入探讨,结果发现:眼球追踪对于捕捉数学思维过程的细节以及非语言交流的细节至关重要,话语分析技术则有助于理解社会交往和数学交流方面的关系;眼动追踪和话语分析的整合使用形成了一个有效的工具,以理解复杂的数学问题解决过程^[21-22]。基于以上分析,在几何问题解决的相关研究中,采用眼动与话语分析技术相结合的研究方式,能够更好地了解不同群体学生在几何问题解决过程中的认知表征差异。

综上所述,学优生和学困生在几何成绩中存在差异,这种差异可能是由于两类学生在几何问题表征及策略使用方面的认知差异所导致的。为进一步分析两类学生几何问题表征的认知差异,研究选取W中学初中二年级学生,依据眼睛—心灵假设(EMH)和事后回忆访谈(Post Recall Interview)的基本原则,采用眼动和话语分析技术整合式的研究方法,探讨学优生和学困生在表征不同难度几何问题过程中的认知差异。

2 方法

2.1 被试

将W市某中学初二年级学生的数学期中考试成绩、几何月考成绩的平均分由高到低进行排序,几何成绩排名前27%的学生为学优生,排名后27%的学生为学困生。同时,依据各班数学教师对学生最近的学习表现进行定性评价,最终确定学优生和学困生各16人,具体信息见表1。排除有明显情绪行为障碍和精神异常的学生。

表1 被试基本信息

被试类型	人数	平均年龄($M \pm SD$)
学优生	16	13.63 $\pm$ 0.72
学困生	16	13.81 $\pm$ 0.83

2.2 工具

采用SMI遥测式眼动仪,实验前要求被试坐在距离屏幕正前方60~80cm处,当被试双眼平视屏幕中心时,找到Eye Image框中呈现的双眼影像。主试调整相应仪器设备的位置和角度,确保双眼影像在屏幕上处于中间位置并能稳定呈现,即使被试头部轻微移动或眨眼也能够很快恢复眼动追踪。在调整主试机和被试机分辨率的基础上,对眼动追踪进行校准验证,直至达到合格后才开始正式测试。此外,由于Anselm等在对数学教育领域眼动追踪方法进行系统性文献综述中指出,兴趣区(Area of Interest,简称AOI)的大小会影响眼动追踪策略^[16]。Holmqvist等也认为,较大的AOI

中,注视点的数量通常会增加^[23]。诸多使用AOI的研究通过使用具有相同大小的AOI来避免这个问题。研究为避免大小效应、位置效应等对眼动研究结果的影响^[24-25],在每道题的固定位置给出几何图形,文字兴趣区和图形兴趣区的划分也做到和相应区域匹配,兴趣区划分示例如图1。

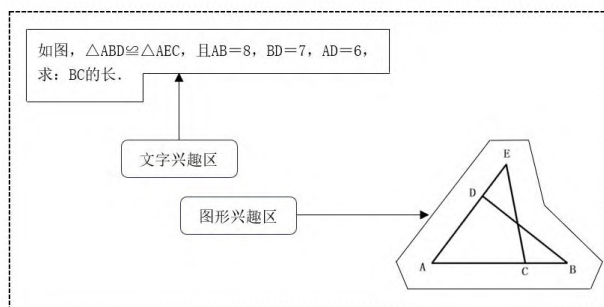


图1 几何问题兴趣区划分示例

2.3 实验材料

研究选取5名教学经验丰富的专家型数学教师,并明确告知其研究目的、方法、工具等信息。要求5名专家结合教材中三角形、全等三角形的相关内容,编制初始几何测试题18道,编制的几何题主要用于区分被试对所测试的几何题解题的正确程度。内容包括三角形和全等三角形判定、性质等平面几何知识。在同一所中学同年级的其余平行班,共190人进行集体测试,为避免出现顺序效应、疲劳效应,测试使用的18道题顺序随机安排,确保每名考生前后、左右试卷不一样。每个考场由班主任或数学教师监考,确保答题真实性。以题目的通过率来划分几何题难度,采用积差相关法划分几何题的区分度,最后筛选出3道有一定难度和区分度较好的平面几何题。

表2 三道题目的难度和区分度

题目	难度	区分度
第一题	0.56	0.73
第二题	0.38	0.60
第三题	0.25	0.60

2.4 眼动指标的选取与数据处理

在眼动实验过程中,要求被试“看到”题目并确定能解答出来后便进入下一道题,学生用眼睛解完几何问题后进入下一题,直至全部眼动研究结束。眼动指标包括:总注视次数(TFC)、总注视时间(TFD)、兴趣区注视次数(AOI-FC)、兴趣区注视时间(AOI-FT)。将兴趣区划分为文字兴趣区和图形兴趣区。其中文字兴趣区是由汉字、几何符号、字母组成,包括已知条件(不含几何图形)和求证信息。图形兴趣区是实验材料中给出的几何图形所围成的区域,数据通过测试电脑自带的Be Gaze分析软件手动导出,使用SPSS26.0进行多元方差分析。

2.5 PRI任务资料收集与处理

学生眼动任务完成后,要求学生在答题纸上将解题过程与具体步骤写出来。随后,进行事后回忆访谈(PRI)。具体提问内容包括:这道题你是怎么理解的,使用了什么方法?为什么采取这种解题方法?是否有其它的解题方法?你认为解题过程是否存在问题?特别是对学生在几何问题表征过程中出现的疑点、错误表征进行深入访谈。

使用录音笔将访谈内容记录下来收集最初资料.将收集的资料转为文本,将被试信息、题目信息、回答内容逐一进行编码,根据学生对几何问题的表征进行类属分析,进一步析出学生在解决几何问题时的心理表征策略和多元表征的

使用情况.

3 结果

3.1 学优生和学困生几何问题表征的眼动指标分析

分析结果如表 3 所示.

表 3 学优生和学困生表征不同难度几何问题眼动指标比较 ($M \pm SD$)

题目类型	注视次数 (次)		注视时间 (秒)	
	学优生	学困生	学优生	学困生
简单题	72 $\pm$ 18	223 $\pm$ 95	22 $\pm$ 5	77 $\pm$ 38
中等题	137 $\pm$ 46	279 $\pm$ 145	45 $\pm$ 18	93 $\pm$ 51
难题	169 $\pm$ 54	371 $\pm$ 108	55 $\pm$ 17	127 $\pm$ 43

对学优生和学困生在表征不同难度几何问题中的注视次数进行方差分析,结果发现:题目类型主效应显著, $F(2, 92)=15.427, P<0.001$. 进一步事后检验发现,表征简单题时的注视次数明显低于表征中等题的注视次数 $P<0.001$, 表征中等题时的注视次数明显低于表征难题的注视次数 $P<0.001$. 被试类型主效应显著, $F(1, 92)=83.202, P<0.001$, 学优生表征几何问题的注视次数 (126 $\pm$ 13) 显著低于学困生 (291 $\pm$ 13). 题目类型和被试类型在注视时间上的交互作用不显著, $F(2, 92)=1.058, P>0.05$.

对学优生和学困生在表征不同难度几何问题中的注视

时间进行方差分析,结果发现:题目类型主效应显著, $F(2, 92)=12.569, P<0.001$. 进一步事后检验发现,表征简单题的注视时间明显低于表征中等题的注视时间 $P<0.05$, 表征中等题的注视时间明显低于表征难题的注视时间 $P=0.01$. 被试类型主效应显著, $F(1, 92)=75.046, P<0.001$, 学优生表征几何问题的注视时间 (41 $\pm$ 5) 显著低于学困生 (99 $\pm$ 5). 题目类型和被试类型在注视时间上交互作用不显著, $F(2, 92)=1.228, P>0.05$.

3.2 学优生和学困生表征几何问题兴趣区的分析

分析结果如表 4 所示.

表 4 学优生和学困生表征几何问题兴趣区眼动指标比较 ($M \pm SD$)

题目类型	学生类型	注视次数 (次)		注视时间 (秒)	
		文字兴趣区	图形兴趣区	文字兴趣区	图形兴趣区
简单题	学优生	24 $\pm$ 8	39 $\pm$ 10	9 $\pm$ 3	10 $\pm$ 4
	学困生	86 $\pm$ 30	82 $\pm$ 53	38 $\pm$ 20	20 $\pm$ 9
中等题	学优生	37 $\pm$ 14	81 $\pm$ 32	16 $\pm$ 6	25 $\pm$ 13
	学困生	97 $\pm$ 66	108 $\pm$ 66	32 $\pm$ 20	29 $\pm$ 17
难题	学优生	40 $\pm$ 18	106 $\pm$ 34	15 $\pm$ 7	36 $\pm$ 14
	学困生	76 $\pm$ 45	122 $\pm$ 76	31 $\pm$ 16	34 $\pm$ 26

对学优生和学困生表征几何问题兴趣区注视次数进行方差分析,结果发现:题目类型在文字兴趣区注视次数上的主效应不显著, $F(2, 92)=0.893, P>0.05$. 被试类型在文字兴趣区注视次数上的主效应显著, $F(1, 92)=49.856, P<0.001$. 学优生表征几何问题的文字兴趣区注视次数明显低于学困生 $P<0.001$. 题目类型和被试类型在文字兴趣区注视次数上的交互作用不显著, $F(2, 92)=1.303, P>0.05$. 题目类型在图形兴趣区注视次数上的主效应显著, $F(2, 92)=9.237, P<0.001$. 在图形兴趣区表征简单题注视次数比中等题少, $P<0.01$, 表征中等题注视次数与表征难题注视次数没有显著差异 $P>0.05$. 被试类型在图形兴趣区注视次数上的主效应显著, $F(1, 92)=7.806, P<0.001$. 学优生表征图形兴趣区注视次数低于学困生 $P<0.001$. 题目类型和被试类型在图形兴趣区注视次数上的交互作用不显著, $F(2, 92)=0.572, P>0.05$.

题目类型在文字兴趣区注视时间上的主效应不显著, $F(2, 92)=0.037, P>0.05$. 被试类型在文字兴趣区注视时间上的主效应显著, $F(1, 92)=53.830, P<0.001$. 学优生表征文字兴趣区注视时间明显低于学困生 $P<0.001$. 题目类型和被试类型在文字兴趣区注视时间上的交互作用不显著, $F(2, 92)=2.145, P>0.05$. 题目类型在图形兴趣区注视时间上的主效应显著, $F(2, 92)=13.766, P<0.001$. 表征简单题图形兴趣区注视时间比中等题短, $P<0.05$, 表征中等题图形兴趣区注视时间与难题没有显著差异 $P>0.05$. 被试类型在图形

兴趣区注视时间上的主效应显著, $F(1, 92)=4.168, P<0.05$. 学优生表征图形兴趣区注视时间明显低于学困生 $P<0.05$. 题目类型和被试类型在图形兴趣区注视时间上的交互作用不显著, $F(2, 92)=1.227, P>0.05$.

3.3 学优生和学困生 PRI 任务与眼动任务的整合式分析

将学优生和学困生访谈的录音资料转化为文字资料,并与学生答卷的具体解题步骤相结合进行话语分析技术分析,形成初步的理解和猜想,包括几何问题表征过程、多元表征使用情况和表征策略使用情况.在整合式分析过程中,探究学优生和学困生在几何问题表征过程中的认知加工差异.

分析结果如表 5 所示.结果发现:学优生在几何问题表征过程中,善于使用多元化的表征方式,体现出较为灵活的几何问题表征能力.在表征策略的使用上,学优生通常采用问题模型策略 (Problem-Model Strategy). 如对学生 Y03 在访谈时说道:读到已知条件可以理解得出 3 个信息,对应角相等,这两个线段加上公共部分的新线段长也相等,可以利用对应边相等寻找其它信息证明两条边所在的三角形全等.学生 Y04 在对最后一题进行表征时说:一方面可以利用已知条件进行推理求证,另外一方面还可以利用图形进行推理求证.而学困生进行几何问题表征时,往往表现出简单数字运算、几何符号简单叠加,甚至出现错误表征或无法进行表征,表征策略大多为直译转化策略 (Direct-Translation Strategy). 如:学生 K02 在求证线段长度时,直接用已知

条件中的“7”和“4”相减，即为答案所得；问其为什么这样做时，回答直接相减就可以得到；进一步询问原理时，对相关

概念性质并不是很清楚，即已有知识和先前经验直接影响了几何问题表征的准确性。

表 5 学优生和学困生 PRI 任务话语分析

对象	类属	表现	样例
学优生	表征策略	较多使用问题模型策略	Y01：因为 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，根据全等三角形的性质，全等三角形的对应边相等，所以 $AC=AE$ 。 Y07：因为线段 $AE+BE=AB$ ，要求 BE 的长度，首先要知道 AE 的长度。
	多元表征	通常情况能够进行多元表征	Y05：其实由 $\angle ADB=\angle AEC$ ，且这两个三角形全等，可以得出其对应边相等，对应角相等，对应角的补角相等。 Y06：这道题还有一种解法就是根据求证的问题进行倒推。
学困生	表征策略	较多使用直译转化策略	K02：已知条件给出了两个数字，从图上看这两个距离差不多，那么直接用 $7-4$ 就得出了所要求线段的长度。 K05：因为 $AD=AE$ ，所以 $AB=AC$ 。
	多元表征	多元表征困难或不能进行多元表征	K01：这道题再没有其它解法了。 K02：要求证这两个边相等，应该证明这两个三角形全等，感觉除了边角边再不能用其它性质来证明三角形全等了，也得不到等量关系。

对学优生和学困生几何问题表征策略与眼动指标进行分析，即假设几何问题表征的认知加工过程与眼动是同步进行的。针对研究所提供的 3 道几何问题，对每位学生的 PRI 任务进行话语分析并结合答卷的具体解题步骤，判断每位学生针对不同难度的几何问题，在进行几何问题表征时使用了问题模型策略还是直译转化策略，并将每道几何问题的眼动指标与问题表征策略对应后进行分析。结果显示：表征策略在注视次数上的主效应不显著， $F(1, 92)=1.036, P>0.05$ ，学生在表征几何问题时使用问题模型策略和直译转化策略在注视次数上不存在显著差异。被试类型在注视次数上的主效应显著， $F(1, 92)=19.199, P<0.001$ ，学优生和学困生使用不同表征策略表征几何问题时，在注视次数上存在显著差异，学优生使用不同表征策略表征几何问题的注视次数（ 133 ± 17 ）显著低于学困生（ 281 ± 19 ） $P<0.001$ 。表征策略和被试类型在注视次数上的交互作用不显著， $F(1, 92)=0.508, P>0.05$ 。表征策略在注视时间上的主效应不显著， $F(1, 92)=1.902, P>0.05$ ，学生在表征几何问题时使用问题模型策略和直译转化策略在注视时间上不存在显著差异。被试类型在注视时间上的主效应显著， $F(1, 92)=15.659, P<0.001$ ，学优生和学困生使用不同表征策略表征几何问题时，在注视时间上存在显著差异，学优生使用不同表征策略表征几何问题的注视时间（ 44 ± 6 ）显著低于学困生（ 94 ± 7 ） $P<0.001$ 。表征策略和被试类型在注视时间上的交互作用不显著， $F(1, 92)=1.216, P>0.05$ 。

4 讨论

4.1 学优生和学困生表征不同难度几何问题眼动模式差异分析

Epelboim 和 Suppes 在早期研究中指出，几何问题的解决不是一个简单的过程，问题解决者需要在问题情境中搜索关键信息、构建概念关系、从记忆中检索先验知识并进行相关推理，这一复杂过程涉及到眼动模式中的回溯、跳跃、重复和重新开始等。因此，通过眼动模式的探讨，可以进一步分析几何问题解决的跳跃性和部分递归性^[26]。研究从宏观层面对几何问题解决的跳跃性进行了分析，结果显示，对于给定的几何问题，即每道题均包含文字信息（包含已知条件和

求证信息）和图片信息，问题解决者眼动模式更倾向于图片信息进行认知加工，学优生在文字信息和图形信息之间的来回跳跃相对较少，而研究中几何问题解决本来就是一个复杂的过程，其递归性质受到多种因素的制约如已有知识、解题经验、记忆提取过程等等，而几何问题解决的认知加工过程往往是以内部心理表征的形式呈现，研究尝试将眼动追踪和话语分析相结合，揭示了眼动模式和几何问题表征过程中的部分递归性，如注视时间、次数与几何问题解决的部分递归性之间的关系。可见，研究通过眼动模式的探讨分析了几何问题解决的跳跃性和部分递归性。但是，在深层次、精准眼动模式分析上还存在一定差距，如具体某一次的跳跃、兴趣区内的跳跃与几何问题表征的关系，还有待于借助神经科学、行为分析等多元整合视角进行分析。研究通过对学优生和学困生在几何问题解决过程中眼动模式的差异分析，结果发现：题目类型、被试类型在注视次数、注视时间上的主效应显著；从注视次数、注视时间的分布趋势可以看出，学优生在表征几何问题用时更少，注视点更少，特别是在进行中等题和难题表征时，注视点、注视时间的离散性更大。这一结果与 Wang 等人的研究具有一致性，其研究发现学优生和学困生眼动模式具有差异性，数困生的注视点较为散乱，不能正确表征原始图形移动或旋转后的图形，不能有效进行二维与三维图形间的转换；而数优生则能快速地对题设图形进行相应表征，并能在头脑中进行加工做出比较判断，其注视点极少落在错误选项上，也很少再去回顾题设图片^[27-28]。这一结果也进一步验证了具有丰富先验知识的个体能够更好地进行问题表征^[29]。

此外，研究中并未发现变量间的交互作用，这与 Wu 和 Liu 的研究结果存在差异，他们的研究中发现被试组别、任务类型和表征 3 个变量之间存在边际交互作用^[20]。这可能是由于：一方面，研究结合学生特点和研究问题进行题目难易度设计时，并未设计难度较大的题目；另一方面，依据 Hunt 等的研究发现，数学焦虑和反应时间之间存在显著的正相关，数学焦虑与注视、停留时间和扫视之间存在显著正相关^[30]，国内相关研究发现数学焦虑负向预测数学学业成绩^[31-32]。研究中学生在“看题”和在实际用笔解题进行的几何问题表征的认知加工过程存在一定差异，可能由于个别学生的

紧张与焦虑等情绪,对认知加工的表征过程产生部分影响.综上,通过对眼动数据的分析发现,在表征同一类型几何问题时,学优生比学困生注视时间更短,注视点更少.研究结果证实了眼动模式、心理表征的认知加工过程与 EMH 假设相吻合.

4.2 学优生和学困生表征几何问题兴趣区眼动模式差异分析

Chen、Wu 对阅读几何证明和解题的眼动数据进行分析发现,个体在阅读几何证明时对图形的依赖程度较高^[33].Lin 等使用带有手写设备的眼动仪来调查几何问题解决过程,也证实了几何问题解决时更依赖于图片而不是文本^[34].因此,对几何问题表征中兴趣区的分析有助于理解学生几何问题表征的认知过程.研究中对兴趣区注视点、注视时间进行均值比较,文字兴趣区的注视点与图形兴趣区的注视点存在差异,文字兴趣区的注视时间与图形兴趣区的注视时间差异不显著.通过注视点比较可以看出,进行几何问题表征时在图形兴趣区注视点的数量明显多于文字兴趣区注视点的数量,通过注视点在兴趣区的分布可以看出,被试进行心理表征时更多地倾向于图形信息,这与 Chen 等人的研究结果是一致的.但是在对注视时间进行分析时,文字兴趣区和图形兴趣区的注视时间差异不显著,被试类型在文字兴趣区、图形兴趣区的注视时间上主效应却显著. Schnotz、Tsai 等人指出眼动指标反映了处理材料所需的认知努力水平,其中较长的总注视时间(TFD)表示较大的认知努力^[35-36].而 Wu 和 Liu 进一步提出了注视厌恶(gaze aversion)时间的计算,即用总注视时间减去兴趣区注视时间,在其研究中注视厌恶时间占到了总时间的 36.93%^[20].研究中总注视时间平均值为 69.77 秒,注视厌恶的平均值为 17.52 秒,占到了总注视时间平均值的 25.11%.根据 Wu 的观点,注视厌恶的程度越高,眼动注视与认知加工处理的一致性就越低.研究注视厌恶时间相对较少,对学优生和学困生厌恶注视时间进行均值比较发现,学优生表现出更少的注视厌恶,学困生注视厌恶时间更长.学优生更多地通过看图形表征几何问题,学困生注视相对散乱,表征准确性相对较低.由于文字兴趣区和图形兴趣区注视时间差异不显著,但注视点差异显著,注视厌恶可能是被试在更多地思考问题或是回忆相关内容、从记忆库中提取或寻找相关信息以及一些更高级的心理活动.

4.3 学优生和学困生 PRI 任务与眼动模式整合式差异分析

在数学问题表征的研究中,国外学者将心理表征策略分为问题模型策略和直译转化策略^[37].已有研究结果显示成功的问题解决者通常使用问题模型策略,失败的问题解决者更倾向于使用直译转化策略^[38],如 Hegarty 等人提出问题解决的心理表征策略即揭示了这一规律性^[39].研究中有关表征策

略使用的研究结果与 Hegarty 等人的研究结果一致.结合眼动和话语分析技术,结果显示学生类型在注视次数、注视时间上的主效应显著;与学困生相比,学优生使用表征策略时注视时间更少,注视点也相对较少;PRI 任务话语分析显示,学优生更加倾向于使用问题模型策略解决问题.在几何问题表征时,学优生更倾向于去理解问题情境,根据情境理解问题中各变量之间的关系,从而建立一个有利于问题解决的意义表征.相反,学困生往往只是关注问题情境中的片面信息,如个别几何符号、文字、图形的片段等,并倾向于运用简单的数学运算或转化,而不是根据问题情境对概念间的关系进行逻辑表征.以上差异也进一步说明学优生和学困生在几何问题表征的策略使用上存在认知差异.几何问题表征的信息加工过程不仅需要情境文本信息的理解,更需要对图形信息间的逻辑关系进行抽象表征^[40].

研究基于 PRI 任务进行了深度访谈,结合学生几何问题解决行为采取间接的推理与判断,将眼动数据与话语分析结合起来,进一步揭示了学生几何问题表征的复杂认知加工过程.在眼动数据分析中并未发现表征策略的主效应,说明几何问题表征时,无论是选择问题模型策略还是选择直译表征策略,其眼动指标如注视次数、注视时间等并不存在显著差异,而事实上两者的认知加工过程却存在差异:学优生在解决几何问题时能够依据丰富的先验知识进行多元化的表征,灵活地运用表征能力进行表征策略的使用;而学困生倾向于使用单一化的问题表征方式,由于先验知识的匮乏表征易出现错误,特别是中等题和难题,表现出认知加工困难.

此外,在话语分析过程中,通过外部语言的思维表达能够更为清晰地了解学生进行几何问题解决时的思路和策略的选择;在进一步结合外部眼动的行为指标,能够有效地分析学生几何问题解决的外部行为与内部思维的具体认知过程.这一方法也为深入分析学生几何问题解决提供了有利的证据,未来研究也可以将这种方法拓展到数学问题解决的其它领域中.

5 结论

(1)学优生和学困生表征几何问题在总注视时间、总注视点的眼动差异证实了眼动模式、心理表征的认知加工过程与 EMH 假设相吻合.

(2)学优生和学困生表征几何问题兴趣区倾向于图形认知加工,学困生注视点更加散乱.

(3)学优生表征几何问题时其认知加工过程表现出更多的灵活性,倾向于使用问题模型策略,学困生则表现出认知加工困难,更多使用直译转化策略.

[参 考 文 献]

- [1] GOLDIN G A. Mathematical representations [M]. Cham: Springer International Publishing, 2020: 566-572.
- [2] PARZYSZ B. "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures [J]. Educational Studies in Mathematics, 1988, 19 (1): 79-92.
- [3] DUVAL R. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking [C] // Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics

- Education, 1999: 3–26.
- [4] 郑国强, 谢圣英. 国际数学教育研究的知识基础与前沿——基于 2018—2022 年数学教育国际期刊的文献计量分析[J]. 数学教育学报, 2024, 33 (1) : 89–97, 102 .
- [5] CHINNAPPAN M. Schemas and mental models in geometry problem solving [J]. Educational Studies in Mathematics, 1998, 36 (3): 201–217.
- [6] SCHOENFELD A H. Expert and novice mathematical problem solving: Final project report and appendices B-H [M]. Washington: ERIC Clearinghouse, 1982: 43–256.
- [7] LAWSON M J, CHINNAPPAN M. Generative activity during geometry problem solving: Comparison of the performance of high-achieving and low-achieving high school students [J]. Cognition and Instruction, 1994, 12 (1): 61–93.
- [8] FITRIANNA A Y, DINIA S, MAYASARI M, et al. Mathematical representation ability of senior high school students: An evaluation from students' mathematical disposition [J]. Journal of Research and Advances in Mathematics Education, 2018, 3 (1): 46–56.
- [9] AKKURT Y Y, DURMUS S. Tracing proof schemes: Some patterns and new perspectives [J]. Journal of Research and Advances in Mathematics Education, 2022, 7 (1): 1–16.
- [10] ANDRÀ C, ARZARELLO F, FERRARA F, et al. How students read mathematical representations: An eye tracking study [C] // Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2009: 49–56.
- [11] LIN J, LIN S. Integrating eye trackers with handwriting tablets to discover difficulties of solving geometry problems [J]. British Journal of Educational Technology, 2018, 29 (1): 17–29.
- [12] LEE W K, WU C J. Eye movements in integrating geometric text and figure: Scanpaths and given-new effects [J]. International Journal of Science and Mathematics Education, 2018, 16 (4): 699–714.
- [13] JACOB R J K, KARN K S. Eye tracking in human-computer interaction and usability research: Ready to deliver the promises [M] // RADACH R, HYONA J, DEUBEL H. The mind's eye: Cognitive and applied aspects of eye movement research. Oxford: Elsevier, 2003: 573–605.
- [14] ANDRÀ C, LINDSTRÖM P, ARZARELLO F, et al. Reading mathematics representations: An eye-tracking study [J]. International Journal of Science and Mathematics Education, 2015, 13 (S2): 237–259.
- [15] HARTMANN M, MAST F W, FISCHER M H. Spatial biases during mental arithmetic: Evidence from eye movements on a blank screen [J]. Frontiers in Psychology, 2015, 6 (1): 1–8.
- [16] STROHMAIER A R, MACKAY K J, OBERSTEINER A, et al. Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review [J]. Educational Studies in Mathematics, 2020, 104 (2): 147–200.
- [17] ULUSOY F, ARGUN Z. Secondary school students' representations for solving geometric word problems in different clinical interviews [J]. International Journal of Education in Mathematics Science and Technology, 2017, 7 (1): 73–92.
- [18] BEACH P, MCCONNELL J. Eye tracking methodology for studying teacher learning: A review of the research [J]. International Journal of Research & Method in Education, 2019, 42 (5): 485–501.
- [19] SCHINDLER M. Domain-specific interpretation of eye tracking data: Towards a refined use of the eye-mind hypothesis for the field of geometry [J]. Educational Studies in Mathematics, 2019, 101 (1) : 123–139.
- [20] WU C J, LIU C Y. Refined use of the eye-mind hypothesis for scientific argumentation using multiple representations [J]. Instructional Science, 2022, 50 (4): 551–569.
- [21] HEYD-METZUYANIM E, HAATAJA E S H, HANNULA M S, et al. What can eye-tracking, combined with discourse analysis, teach us about the ineffectiveness of a group of students solving a geometric problem [J]. Instructional Science, 2023, 51 (3): 1–34.
- [22] MCINTYRE N A, JARODZKA H, KLASSEN R M. Capturing teacher priorities: Using real-world eye-tracking to investigate expert teacher priorities across two cultures [J]. Learning and Instruction, 2019, 60 (1): 215–224.
- [23] HOLMQVIST K, NYSTRÖM M, ANDERSSON R, et al. Eye tracking: A comprehensive guide to methods and measures [M]. Oup Oxford: Oxford University Press, 2011: 23–78.
- [24] 游旭群, 邱香, 牛勇. 视觉表象扫描中的视角大小效应[J]. 心理学报, 2007 (2) : 201–208 .
- [25] 臧传丽, 张慢慢, 郭晓峰, 等. 中文词汇加工的若干效应: 基于眼动研究的证据[J]. 心理科学进展, 2012, 20 (9) : 1 382–1 392 .
- [26] EPELBOIM J, SUPPES P. A model of eye movements and visual working memory during problem solving in geometry

- [J]. Vision Research, 2001, 41 (12): 1 561–1 574.
- [27] WANG H S, CHEN Y T, LIN C H. The learning benefits of using eye trackers to enhance the geospatial abilities of elementary school students [J]. British Journal of Educational Technology, 2014, 45 (2): 340–355.
- [28] 周琰, 郇倩. 眼动研究在数学学习困难领域的应用[J]. 数学教育学报, 2016, 25 (5) : 84–87 .
- [29] INGLIS M, ALCOCK L. Expert and novice approaches to reading mathematical proofs [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 2012, 43 (4): 358–390.
- [30] HUNT T E, CLARK-CARTER D, SHEFFIELD D. Exploring the relationship between mathematics anxiety and performance: An eye-tracking approach [J]. Applied Cognitive Psychology, 2015, 29 (2): 226–231.
- [31] 夏玉梅, 宁连华, 赵静亚. 初二学生数学逆商与数学学业成绩的关系研究——数学焦虑的中介作用[J]. 数学教育学报, 2024, 33 (1) : 16–20 .
- [32] 甘艳. 数学自我效能对初中生数学成就的影响: 数学焦虑和内在价值的链式中介模型[J]. 数学教育学报, 2024, 33 (4) : 26–33 .
- [33] CHEN C Y, WU C J. Eye movements during geometry proof reading: Text contrasting with figure and the color effects [J]. Journal of Educational Practice and Research, 2012, 25 (2): 35–66.
- [34] LIN J J, LIN S S. Tracking eye movements when solving geometry problems with handwriting devices [J]. Journal of Eye Movement Research, 2014, 7 (1): 1–14.
- [35] SCHNOTZ W, LUDEWIG U, ULLRICH M, et al. Strategy shifts during learning from texts and pictures [J]. Journal of Educational Psychology, 2014, 106 (4): 974.
- [36] TSAI P Y, YANG T T, SHE H C, et al. Leveraging college students' scientific evidence-based reasoning performance with eye-tracking-supported metacognition [J]. Journal of Science Education and Technology, 2019, 28 (6): 613–627.
- [37] KINTSCH W, GREENO J G. Understanding and solving word arithmetic problems [J]. Psychological Review, 1985, 92 (1): 109–129.
- [38] ZHAO S, CAI X, WANG L, et al. Effect of the levels of procedural knowledge in disciplinary domain on secondary school mathematical problems' representational strategies [J]. Advances in Psychology, 2013, 3 (1): 16–21.
- [39] HEGARTY M, RICHARD E. Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers [J]. Journal of Educational Psychology, 1995, 87 (1): 18.
- [40] 沈阳, 张晋宇, 鲍建生. 表征在数学教育中的研究现状[J]. 数学教育学报, 2022, 31 (2) : 82–89 .

Cognitive Differences in Geometry Problem Representation between High- and Low-Achieving Students: Integrated Evidence from Eye-Tracking and Discourse Analysis Techniques

BAO Han-jin^{1,3}, LIU Yi^{1,2}, JIAO Jiang-li^{1,2}

(1. College of Education Science, Xinjiang Normal University, Xinjiang Urumqi 830017, China;

2. Xinjiang Key Laboratory of Mental Development and Learning Science, Xinjiang Urumqi 830017, China;

3. School of Educational Science, Changji University, Xinjiang Changji 831100, China)

Abstract: The representation of geometric problems is a critical cognitive factor affecting middle school students' problem-solving abilities in geometry. This study selected 32 second-grade middle school students from a particular school (16 high-achieving and 16 low-achieving students) and employed eye-tracking and discourse analysis techniques to explore cognitive differences in how high- and low-achieving students represent plane geometry problems of varying difficulty levels. Using an SMI remote eye tracker, the eye-tracking results indicated that high-achieving students showed significantly fewer total fixations, shorter total fixation durations, fewer fixations within areas of interest, shorter fixation durations within areas of interest, and fewer fixations within the text area of interest compared to low-achieving students. Discourse analysis revealed that high-achieving students tended to engage with problem contexts and employ diverse cognitive processing strategies, whereas low-achieving students were more inclined towards literal translation or singular cognitive processing strategies. These findings suggest that both high- and low-achieving students tend to focus on graphical cognitive processing in geometry problem areas of interest; however, high-achieving students are more likely to adopt problem-modeling strategies, whereas low-achieving students display difficulties in cognitive processing and rely more on literal translation strategies. High-achieving students demonstrate superior problem representation skills and greater flexibility in cognitive processing than their low-achieving counterparts.

Key words: geometry problem representation; eye-tracking; high-achieving students; low-achieving students; discourse analysis techniques

[责任编辑: 张楠、陈隼]